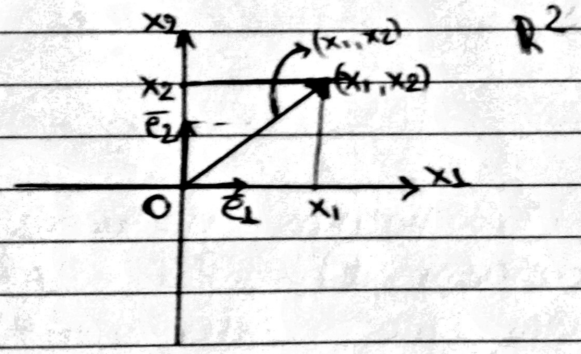
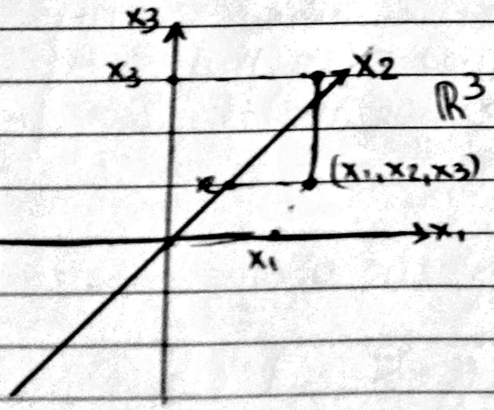
10/10/2017

Ο Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης $n\in\mathbb{N}$ με στοιχεία τα διανύσματα $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ που έχουν συνεταγμένες $x_i\in\mathbb{R}$ $i=1,\dots,n$ ως προς την συνήθη (κανονική) βάση $\bar{e_i}=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$

<u>Παρατήρηση</u>: Γεωμετρική αναπαράσταση του $\mathbb{R}^2$



Στο «σημείο» $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ (γεωμετρικά) αντιστοιχεί (1-1) ένα «διάνυσμα» $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$



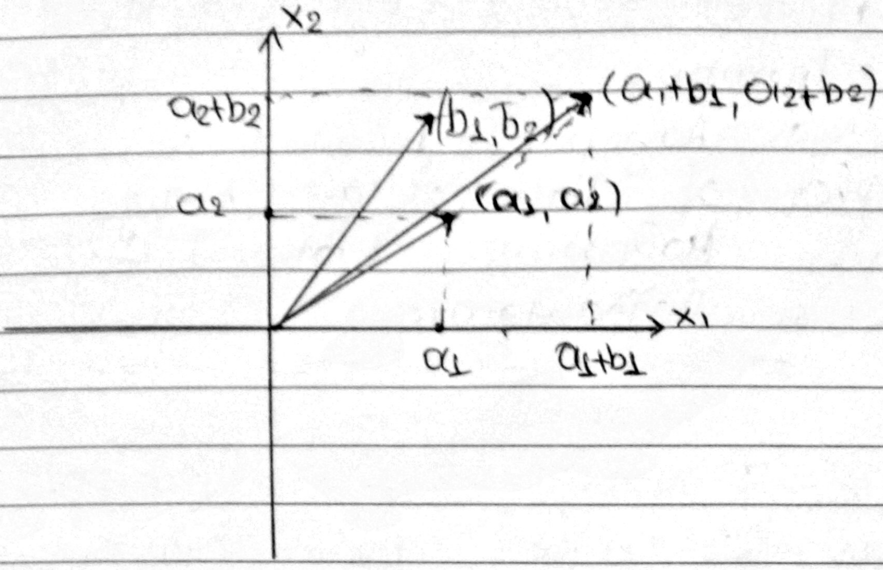
Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού.

$+ : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(\bar{x},\bar{y}) \longrightarrow \bar{x}+\bar{y} := (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

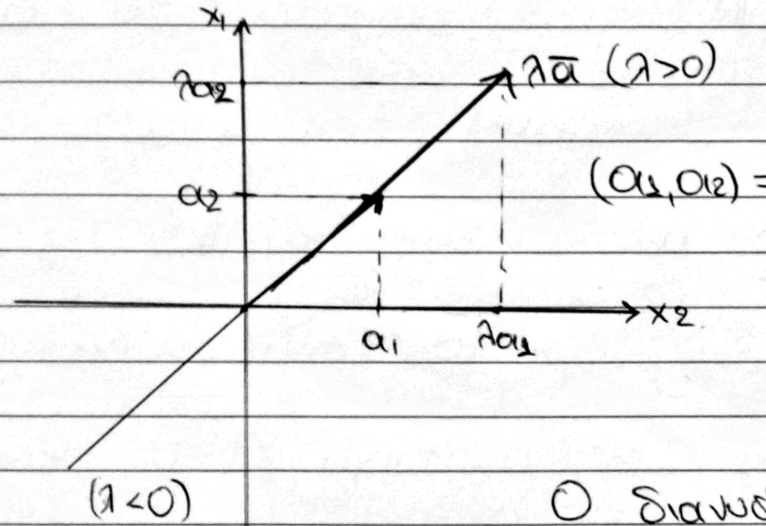
$(a,\bar{x}) \longrightarrow a\cdot\bar{x} := (ax_1,\dots,(x_1,\dots,x_n)(y_1,\dots,y_n)) = (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$

Γεωμετρική αναπαράσταση πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού



πρόσθεση

βαθμωτό πολλαπλασιασμός



Ο διανυσματικός υποχώρος (διάστασης 1) $\{\lambda\bar{a} \cdot \lambda\in\mathbb{R}\}$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^n$.

(αν $\bar{a}\neq\bar{0}$, $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$)

(Αν $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=\dots$ τότε ο περιορισμός της f στην ευθεία $\{\lambda\bar{b}=\lambda(b_1,b_2)=(\lambda b_1,\lambda b_2):\lambda\in\mathbb{R}\}$ είναι μια συνάρτηση $\underset{\in\mathbb{R}}{\lambda}\to(\lambda b_1,\lambda b_2)\in\mathbb{R}$, δηλ. μία συνάρτηση μίας μεταβλητής)

Υπενθυμίζουμε τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}^n$.

- $\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})=(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}$, $\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}$, $\exists\ \bar{0}=(0,\dots,0)$
  $\bar{0}+\bar{x}=\bar{x}$
- $\forall\ x\in\mathbb{R}^n\ \exists -\bar{x}=(-\bar{x}_1,\dots,-\bar{x}_n)$: $\bar{x}+(-\bar{x})=\bar{x}-\bar{x}=\bar{0}$
- $1\cdot\bar{x}=\bar{x}$, $1\in\mathbb{R}$
  $a(\beta\bar{x})=(a\beta)\bar{x}$
- $a(\bar{x}+\bar{y})=a\bar{x}+a\bar{y}$ $(a+\beta)\bar{x}=a\bar{x}+\beta\bar{x}$
- Επίσης $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)=x_1\underset{(1,0,\dots,0)}{\underset{=}{\bar{e}_1}}+\dots+x_n\underset{(0,0,\dots,1)}{\underset{=}{\bar{e}_n}}=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\bar{e}_i$

Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται το (κανονικό) εσωτερικ
γινόμενο $\bar{x}\cdot\bar{y} = (x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ($\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

με τις ιδιότητες:

$\bar{x}\cdot\bar{y}=\bar{y}\cdot\bar{x}$ (συμμετρία)

$(a\bar{x}+\beta\bar{y})\cdot\bar{z} = a(\bar{x}\cdot\bar{z})+\beta(\bar{y}\cdot\bar{z})$ (γραμμικότητα ως προς το πρώ όρισμα)

(Θετικά ορισμένο): $\bar{x}\cdot\bar{x}\geq 0 \ \forall \bar{x}\in\mathbb{R}^n$

$\bar{x}\cdot\bar{x}=0 \iff \bar{x}=\bar{0}$ ($\bar{x}\cdot\bar{x}=0 \iff$

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_1^2+\dots+x_n^2=0 \implies x_i^2=0 \implies x_i=0$, $\forall i=1,\dots,n$).

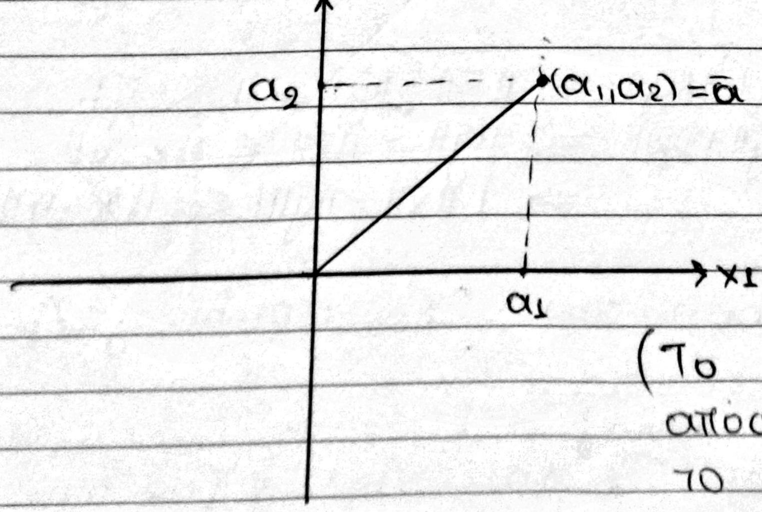
Συνεπώς, ο $\mathbb{R}^n$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο (με αυτό το εσωτ. γινόμενο).

Το (κανονικό) εσωτερικό γινόμενο $\bar{x}\cdot\bar{y}=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\forall \bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $\bar{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ επάγει (δηλ. οδηγεί σε) την λεγόμενη (Ευκλείδια) νόρμα (ή στάθμη (norm))

$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}} \geq 0 \ \forall \bar{x}\in\mathbb{R}^n$ (Αυτό είναι το μήκος του διανύσματος $\bar{x}$)

Γεωμετρική αναπαράσταση



Το μήκος του $\bar{a}$ είναι $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ (Πυθαγόρειο Θ.) $=\|\bar{a}\|$

(Το $\|\vec{a}\|$ μας δείχνει και την απόσταση του σημείου $\bar{a}$ από το $\bar{0}$.)

Η (Ευκλείδια) νόρμα όπως κάθε νόρμα είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ η οποία έχει τις ιδιότητες:

(α) $\|\bar{x}\| \geq 0 \quad \forall \bar{x}\in\mathbb{R}^n$

και $\|\bar{x}\|=0 \iff \bar{x}=\bar{0}$

(β) $\|a\bar{x}\| = |a|\cdot\|\bar{x}\|, \ \forall a\in\mathbb{R} \ \bar{x}\in\mathbb{R}^n$ (απόλυτη ομογένεια)

(γ) $\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\|+\|\bar{y}\| \quad \forall \bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$ (τριγωνική ανισότητα)

Παρατήρηση (a) κάθε νόρμα έχει αυτές τις ιδιότητες

(b) η Ευκλείδια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$ είναι το αντίστοιχο της απόλυτης τιμής στο $\mathbb{R}$.

Για την απόδειξη του (γ) χρησιμοποιούμε την ~~ιδιότητα~~ ανισότητα Cauchy-Schwarz $|\bar{x}\cdot\bar{y}| \leq \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$

Απόδειξη (ανισ. Cauchy-Schwarz):

· έστω $\bar{x},\bar{y}$ γραμμικώς ανεξάρτητα $\Longrightarrow$

$\forall \lambda\in\mathbb{R} \quad 0<\|\lambda\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\lambda\bar{x}+\bar{y})(\lambda\bar{x}+\bar{y}) =$

$\lambda^2\|\bar{x}\|^2+2\lambda\bar{x}\cdot\bar{y}+\|\bar{y}\|^2$

$\Longrightarrow$ (δευτεροβάθμιο πολυώνυμο) διακρίνουσα $4(\bar{x}\cdot\bar{y})^2-4\|\bar{x}\|^2\|\bar{y}\|^2<0$

· Αν $\bar{x},\bar{y}\neq\bar{0}$ γραμμικά εξαρτημένα τότε $\exists\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\bar{y}=\lambda\bar{x} \Longrightarrow |\bar{x}\cdot\bar{y}| = |\lambda|\cdot\|\bar{x}\|^2 = \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$

Αν $\bar{x}=\bar{0} \vee \bar{y}=\bar{0} \Longrightarrow |\bar{x}\cdot\bar{y}|=|0| \underset{\bar{x}=\bar{0}}{=} \|\bar{0}\|\cdot\|\bar{y}\|$

· (τριγ. ανισότητας) $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\bar{x}+\bar{y})\cdot(\bar{x}+\bar{y}) =$

$\underbrace{\|\bar{x}\|^2}_{\geq 0}+2\bar{x}\bar{y}+\underbrace{\|\bar{y}\|^2}_{\geq 0} \leq \|\bar{x}\|^2+2|\bar{x}\cdot\bar{y}|+\|\bar{y}\|^2 \leq (\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|)^2$

Αντίστροφη τριγωνική ανισότητα $\|\bar{x}\|-\|\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$

$\|\bar{x}\| = \|\bar{x}-\bar{y}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|+\|\bar{y}\| \Rightarrow \|\bar{x}\|-\|\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$

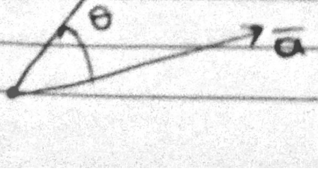
$\|\bar{y}\| = \|\bar{x}-\bar{y}-\bar{x}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|+\|\bar{x}\| \Rightarrow \|\bar{y}\|-\|\bar{x}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$

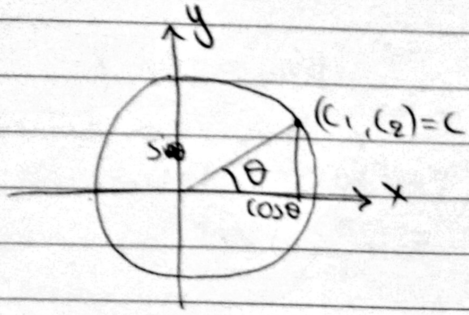
$\Rightarrow \big|\|\bar{x}\|-\|\bar{y}\|\big| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$

Γεωμετρική Αναπαράσταση του εσωτερικού γινομένου:

Αν $\bar{x},\bar{y}\neq\bar{0}$, τότε $\cos\theta = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|}$

όπου θ η κυρτή γωνία (και όχι οξεία όπως λες στις σημειώσεις)





$\cos\theta = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (1, 0)$
$\sin\theta = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (0, 1)$

Μέχρι τώρα ξέρουμε για τον $\mathbb{R}^n$:

(1) διαν. χώρος με $\bar{x}+\bar{y}$ όπου $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$

(2) $\bar{x}\cdot\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ διαν. χώρος με εσ. γινόμενο

⇓

(3) $\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$ διαν. χώρος με νόρμα.

⇓

(4) μετρικός χώρος: με την μετρική (απόσταση) που επάγεται από την νόρμα, δηλ. ορίζουμε ως απόσταση δύο διανυσματικών σημείων στον $\mathbb{R}^n$

$d(\bar{x},\bar{y}) := \|\bar{x}-\bar{y}\| \quad \forall \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ δηλ. μιας απεικόνισης

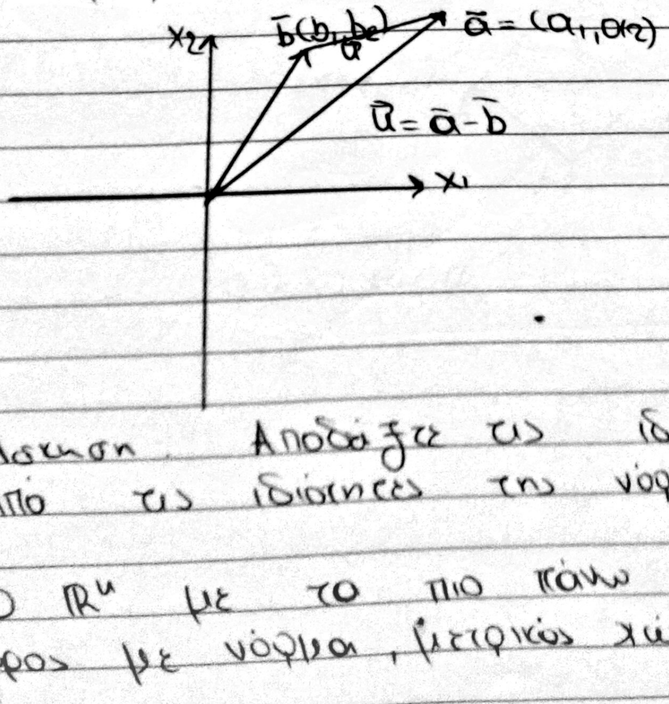
$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

α) συμμετρία $d(\bar{x},\bar{y}) = d(\bar{y},\bar{x})$

(β) $d(\bar{x},\bar{y}) \geq 0 \quad \forall \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ και $d(\bar{x},\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$

(γ) $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y})$ (τριγ. ανισότητα).

Γεωμετρική αναπαράσταση



$d(\vec{a},\vec{0}) = \|\bar{a}\|$

Άσκηση. Αποδείξτε τις ιδιότητες της απόστασης (τριγ. ανισ.) από τις ιδιότητες της νόρμας.

Ο $\mathbb{R}^n$ με τα πιο πάνω (1)-(4) (διαν. χώρος με εσ. γιν., διαν. χώρος με νόρμα, μετρικός χώρος) ονομάζεται <u>Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$</u>.

Εκτός από την Ευκλείδεια νόρμα $\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$ υπάρχουν και άλλες νόρμες στον $\mathbb{R}^n$, π.χ. η «νόρμα-άπειρο» ∞-νόρμα, $\|\bar{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ και η νόρμα-1 (1-νόρμα) $\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

(η Ευκλείδεια νόρμα $\|\bar{x}\| = \|\bar{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$

και η νόρμα-ένα είναι ειδικές περιπτώσεις της p-νόρμας: $\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$

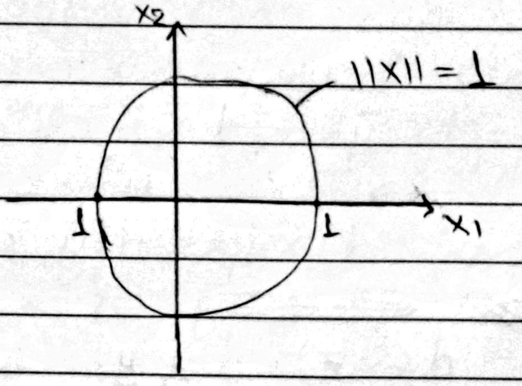
όπου $1 \leq p < \infty$)

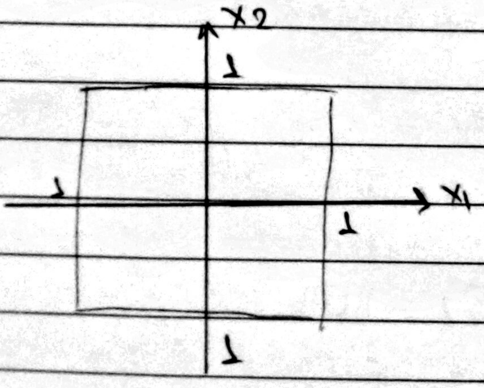
Αναπαράσταση στον $\mathbb{R}^2$ των συνόλων

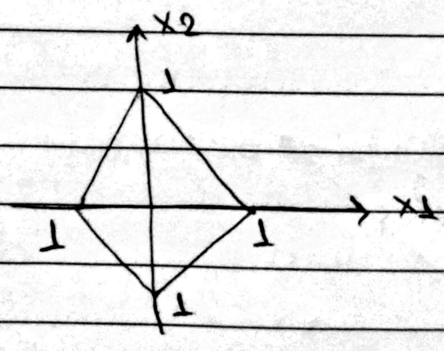
$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|\bar{x}\| = 1$

$\|\bar{x}\|_1 = 1$

$\|\bar{x}\|_\infty = 1$







Να βρω ποιο ανήκει σε ποιο.